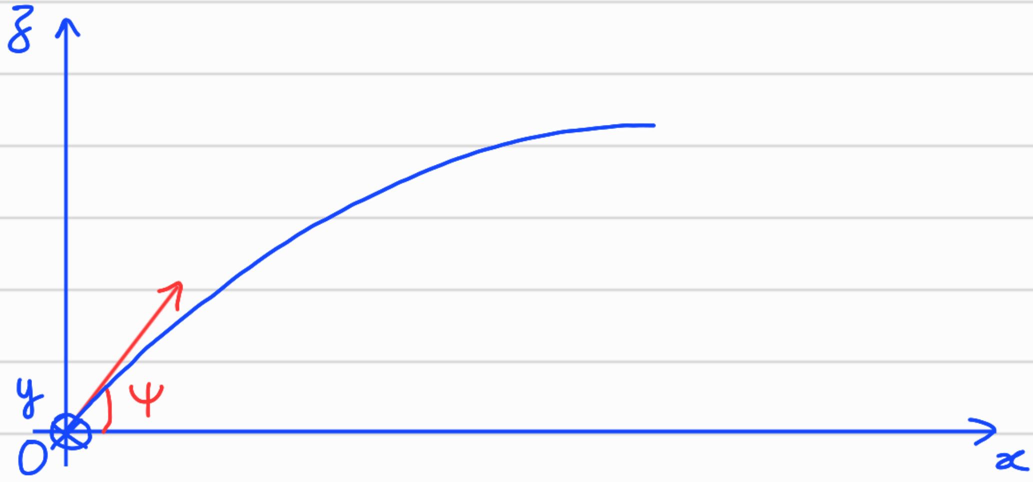
# Exercices de cours du chapitre 8

## Exercice (A)

Q1. On étudie le système {ballon} dans le référentiel terrestre supposé galiléen à l'échelle de l'expérience.
On utilise le système de coordonnées cartésiennes.

Q2.




Q3. Bilan des forces :
* poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

(on néglige la poussée d'Archimède)

On applique le principe fondamental de la dynamique au système {ballon} de masse constante :

$\vec{P} = m\vec{a}$ soit $\boxed{\vec{a} = \vec{g}}$

le vecteur accélération est donc constant.

Q4. On projette l'expression $\vec{a} = \vec{g}$ dans le repère cartésien :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases}$$

On intègre : $\begin{cases} \dot{x}(t) = A \\ \dot{y}(t) = B \\ \dot{z}(t) = -gt + C \end{cases}$

avec A, B, C des constantes que l'on détermine avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos \varphi \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \dot{z}(0) = v_0 \sin \varphi \end{cases}$$

Soit $\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos \varphi \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin \varphi \end{cases}$

On intègre pour obtenir les équations horaires de la position :

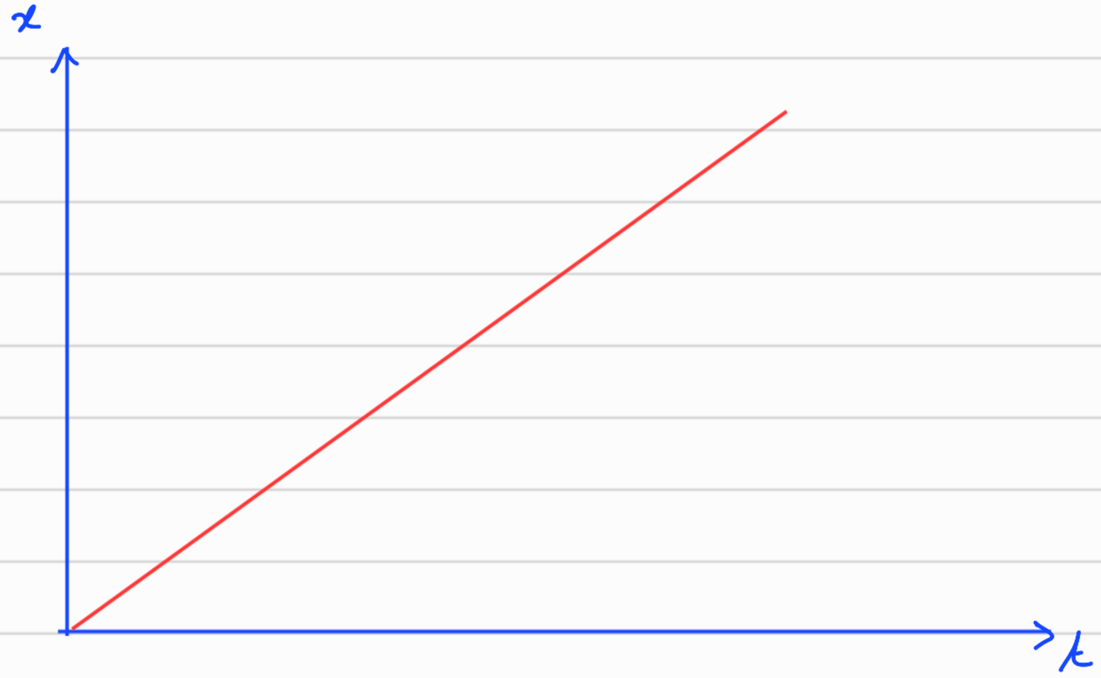
$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \varphi \, . \, t + D \\ y(t) = E \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \varphi \, t + F \end{cases}$$

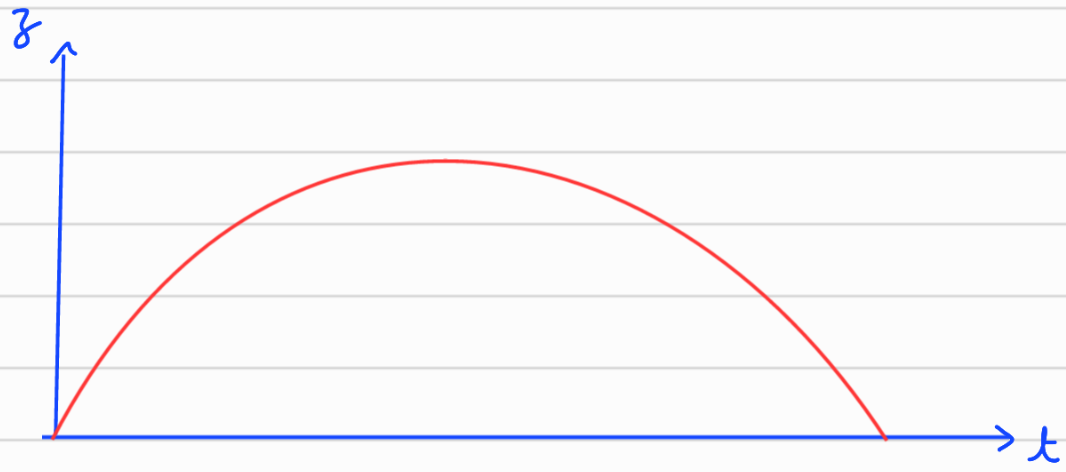
avec $D, E, F$ des constantes que l'on détermine avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} 0 = D \\ 0 = E \\ 0 = F \end{cases}$$

On a donc $\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\varphi . t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\varphi . t \end{cases}$

Q5.

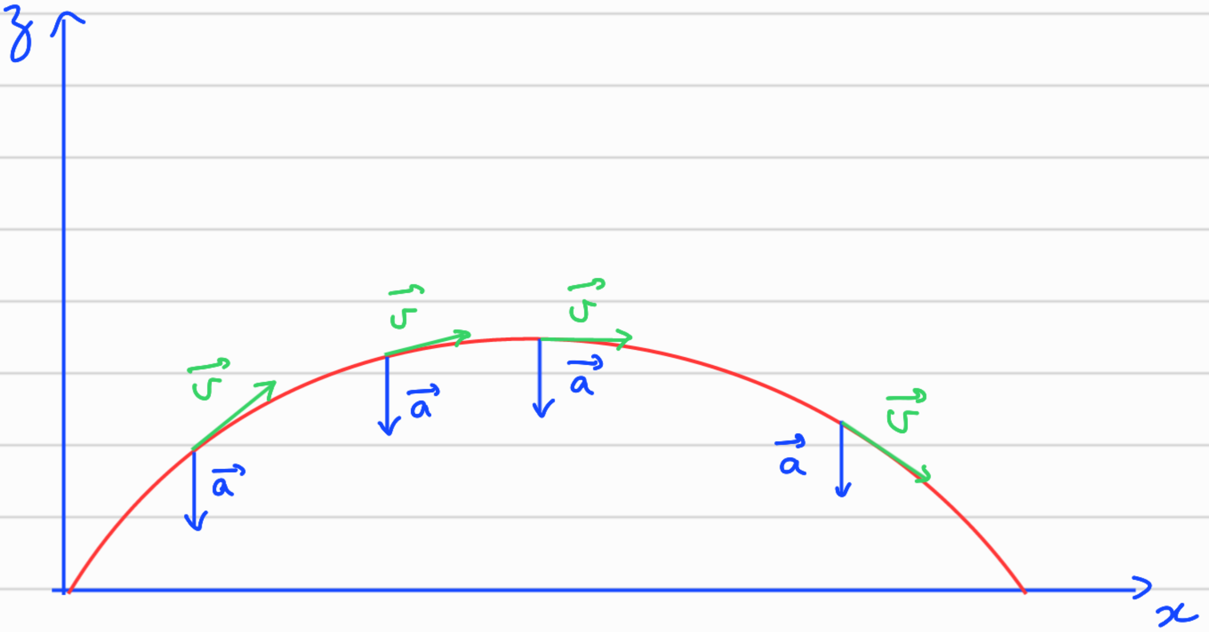




Q6. $t = \dfrac{x}{v_0 \cos \psi}$

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \left( \frac{x}{v_0 \cos \psi} \right)^2 + v_0 \sin \psi \cdot \frac{x}{v_0 \cos \psi}$$

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \psi} x^2 + \tan \psi \cdot x}$$

La trajectoire est parabolique.




Q7. On détermine la portée du tir en résolvant l'équation :
$z(x) = 0$

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x^2 + \tan\varphi\, x$$

$$0 = x\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x + \tan\varphi\right)$$

$\Rightarrow$ 2 solutions $\begin{cases} x = 0 \quad \text{(position initiale)} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\tan\varphi}{g} \cdot 2v_0^2\cos^2\varphi = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi \end{cases}$

La portée vaut $\boxed{x_p = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi}$

La portée est maximale pour l'angle $\varphi_m$ tel que $\frac{dx_P}{d\varphi} = 0$

$$\frac{v_0^2}{g} \cdot 2\cos(2\varphi_P) = 0 \iff 2\varphi_P = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\varphi_P = \frac{\pi}{4}}$$

Q8. On détermine la flèche en résolvant $\frac{dz}{dx} = 0$

$$\iff -\frac{2g}{2v_0^2\cos^2\varphi} x_F + \tan\varphi = 0$$

$$x_F = \tan\varphi \cdot \frac{v_0^2\cos^2\varphi}{g} = \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot v_0^2}{g}$$

On réinjecte dans $z(x)$ :

$$z_F = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot v_0^2}{g}\right)^2 + \tan\varphi \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{g} v_0^2$$

$$z_F = \frac{-\sin^2\varphi}{2}\frac{v_0^2}{g} + \frac{\sin^2\varphi}{g} v_0^2$$

$$\boxed{z_F = \frac{\sin^2\varphi}{2g} v_0^2}$$

## Exercice de cours (B)

Q1. On étudie le système {grêlon} dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Bilan des forces : si on néglige les frottements la seule force subie par le grêlon est $\vec{P} = m\vec{g}$.

On applique le principe fondamental de la dynamique au grêlon, de masse m supposée constante :

$m\vec{a} = m\vec{g}$.

On a donc $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$

Par intégration on obtient : $\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt \end{cases}$

car à $t = 0$ le grêlon a une vitesse nulle.

On intègre à nouveau pour avoir la position : $\begin{cases} x(t) = A \\ y(t) = B \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C \end{cases}$

avec $A, B, C$ des constantes que l'on détermine avec condition initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = h \end{cases} \quad \text{soit} \quad A = B = 0 \quad \text{et} \quad C = h.$$

On a donc $\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$

On détermine $t_s$ tel que $z(t_s) = 0$

$$-\frac{1}{2} g t_s^2 + h = 0 \iff \boxed{t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

et $v(t_s) = |\dot{z}(t_s)| = \left|-g\sqrt{\frac{2h}{g}}\right| = \left|-\sqrt{2gh}\right|$

$$\boxed{v(t_s) = \sqrt{2gh}}$$

AN : $t_s = \sqrt{\frac{2.10^3}{9{,}8}} = \underline{14\ s}$

$$v(t_s) = \sqrt{2.9{,}8.10^3} = \underline{140\ m.s^{-1}}$$

Cette vitesse est bien supérieure à celle mesurée expérimentalement.

Q2 - On écrit l'équation aux dimension pour la force $\vec{f}$ :

$$M.L.T^{-2} = [\eta]\, L.\, L.T^{-1}$$

soit $[\eta] = M L^{-1} T^{-1}$

L'unité SI de $\eta$ est donc $kg.m^{-1}.s^{-1}$.

Q3. On applique à nouveau le principe fondamental de la dynamique au système {grêlon} dans le référentiel terrestre, en incluant la force de traînée :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}$$

On projette dans le repère cartésien :

avec $\vec{g}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ et $\vec{f}\begin{pmatrix} -6\pi\eta R v_x \\ -6\pi\eta R v_y \\ -6\pi\eta R v_z \end{pmatrix}$

Soit : $$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{6\pi\eta R}{m} v_x \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{6\pi\eta R}{m} v_y \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g - \dfrac{6\pi\eta R}{m} v_z \end{cases}$$

L'équation différentielle vérifiée par la composante $v_z$ est

$$\boxed{\frac{dv_z}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m} v_z = -g}$$

C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants, comme celle rencontrée dans l'étude du régime transitoire du circuit RC.

Q3. Quand le grêlon a atteint sa valeur limite $v_z = v_{z\,lim}$ = constante et :

$$\frac{6\pi\eta R}{m} v_{z\,lim} = -g$$

$$\boxed{v_{z\,lim} = \frac{-mg}{6\pi\eta R}}$$

AN : $v_{z\,lim} = -\dfrac{3{,}9.10^{-3} . 9{,}8}{6\pi . 1{,}7.10^{-5} . 1{,}1.10^{-2}}$

$$v_{z\,lim} = \underline{1{,}1 . 10^{4}\ m.s^{-1}}$$

En mettant l'équation différentielle sous forme canonique :

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = \frac{v_{z,lim}}{\tau}$$

Par identification : $\tau = \dfrac{m}{6\pi\eta R}$

La durée du régime transitoire est $\Delta t_1 = 5\tau$

soit $\boxed{\Delta t_1 = \dfrac{5m}{6\pi\eta R}}$

AN : $\Delta t_1 = \dfrac{5 . 3{,}9.10^{-3}}{6\pi . 1{,}7.10^{-5} . 1{,}1\ 10^{-2}}$

$\underline{\Delta t_1 = 5{,}5.10^{3}\,s}$

Les valeurs calculées avec ce modèle sont cohérentes avec celles que l'on peut lire sur le graphique $v(t)$ mais elles surestiment encore la vitesse, car sur le portrait de phase, on lit $v(z=0) = 140\,m/s$ (comme dans le modèle sans frottements)

Q5. $[f] = M.L.T^{-2}$

et $[\rho].[C_x].[R]^2.[v]^2 = M.L^{-3}.L^{2}.L^2T^{-2} = M.LT^{-2}$

L'expression de la force de frottement est donc bien homogène !

Q6. Le principe fondamental de la dynamique appliqué au grêlon dans le référentiel terrestre est donc :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}$$

avec

$$\vec{f} \begin{cases} f_x = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\, v_x \\ f_y = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\, v_y \\ f_z = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}\, v_z \end{cases}$$

Or $v_x = v_y = 0$ car La vitesse initiale est nulle donc $\vec{f}(0) = \vec{0}$ donc $\vec{a}(0) = \vec{g}$

le grêlon a donc un mouvement dans la direction $(Oz)$ uniquement, et on a $f = \frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 v_z^2$

car $\sqrt{v_z^2} = -v_z$ $(v_z < 0)$

L'équation qui régit le mouvement est donc :

$$\frac{dv_z}{dt} = -g + \frac{1}{2m}\rho C_x \pi R^2 v_z^2$$

$$\boxed{\frac{dv_z}{dt} - \frac{1}{2m}\rho C_x \pi R^2 v_z^2 = -g}$$

C'est une équation différentielle non linéaire du 1er ordre.

Q6. Quand la vitesse limite est atteinte $v_z = \text{cte}$ donc $\frac{dv_z}{dt} = 0$

d'où $v_{lim2}^2 = \frac{2gm}{\rho C_x \pi R^2}$

Soit $$\boxed{v_{lim2} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gm}{\rho C_x \pi}}}$$

AN : $$v_{lim2} = \frac{1}{1,1.10^{-2}}\sqrt{\frac{2.9,8.39.10^{-3}}{1,3.0,38.\pi}}$$

$$v_{lim2} = \underline{20\ m.s^{-1}} = \underline{73\ km.h^{-1}}$$

La valeur obtenue est cohérente avec la valeur obtenue expérimentalement.

Q8. Par lecture graphique sur le graphe $v = f(t)$, on a : $\Delta t_2 \simeq 6s$.

Sur le portrait de phase, on lit que le graphique atteint sa vitesse limite à l'altitude 900m, soit après 100 m de chute.

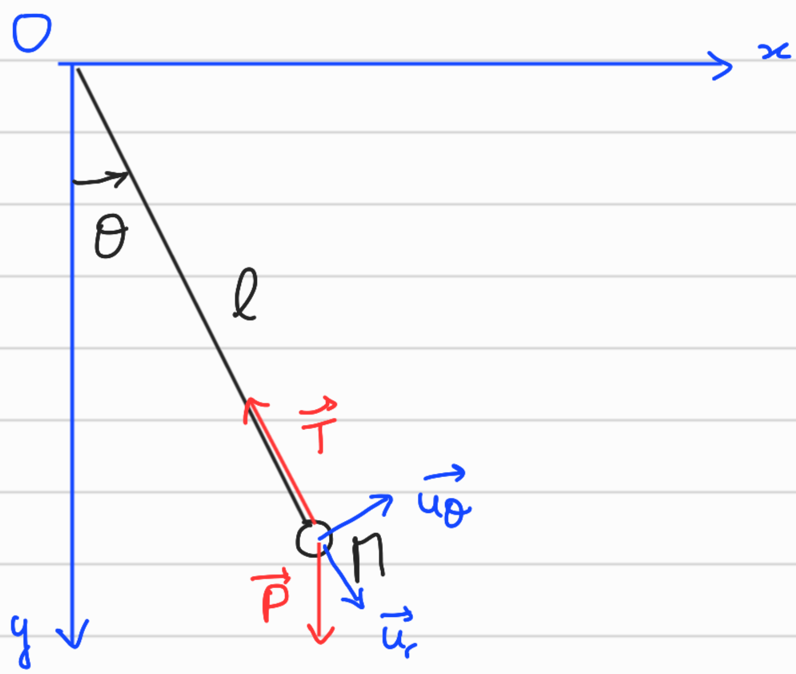
Il parcourt ensuite les 900 m jusqu'au sol à vitesse constante $\simeq 20m/s$

Soit une durée de $\frac{900}{20} \simeq 45$ s.

En plus des 6s de la $1^{ère}$ phase, la durée totale de chute est environ 51 s.

## Exercice de cours C

Q1. Le point M est en mouvement circulaire. On utilise les coordonnées cylindriques. (base polair $\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z}$)




Q2. Bilan des forces :

* poids $\vec{P} = m\vec{g}$

* tension du fil : $\vec{T} = -T\vec{u_r}$

Q3. On applique le principe fondamental de la dynamique au système masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$

avec $\vec{g} = g\cos\theta\,\vec{u_r} - g\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

et $\vec{T} = -T\,\vec{u_r}$

Q4. Le mouvement étant circulaire
$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + \ell\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$$m\begin{pmatrix} -\ell\dot{\theta}^2 \\ \ell\ddot{\theta} \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} g\cos\theta \\ -g\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

La norme de $\vec{T}$ étant inconnue, on projette sur $\vec{u_\theta}$ :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

soit $\boxed{\ell\ddot{\theta} = -g\sin\theta}$

c'est une équation différentielle non linéaire.

Q5 Dans le cas où $\theta < 1\,\text{rad}$ on a $\sin\theta \approx \theta$

Soit $\quad l\ddot{\theta} = -g\theta$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}$.

Q6. Les solutions sont de la forme :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

avec A et B deux constantes que l'on détermine avec les conditions initiales : $\theta(0) = \theta_0$ et $l\dot{\theta}(0) = 0$

$$\theta_0 = A$$

et $\dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

$$\dot{\theta}(0) = B\omega_0 = 0$$

On a donc $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)}$